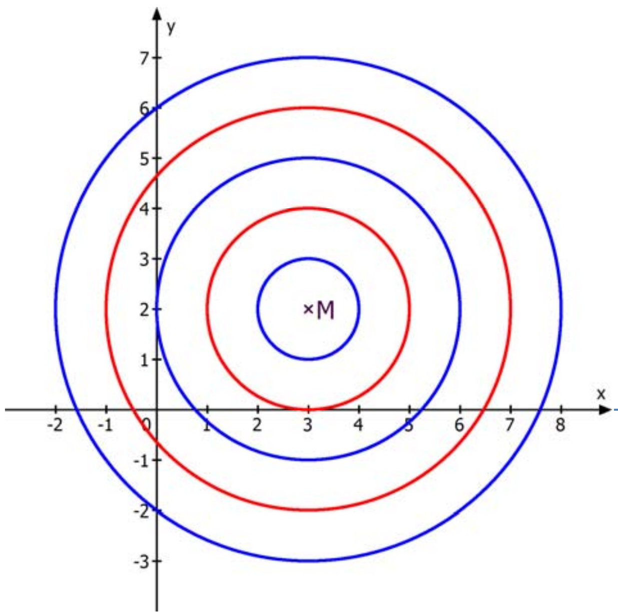


Kreise

Text Nr. 54050

Stand 22. September 2016

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.schule

Vorwort

Der Kreis ist ein Standardthema im Schulunterricht. Daher kommt er in der Internetbibliothek der Mathematik-CD oft vor:

In der Geometrie:	11511	Kreisinhalt und -Umfang
	11512	Kreisteile
	11513	Kreisfiguren
In der Analytischen Geometrie:	22111	Kreisgleichungen
	22112	Kreis und Gerade / Tangenten
	22113	Schnitt zweier Kreise, Kreisscharen
	21250	Affine Abbildung von Kreisen (Planung)
	21400	Inversion (Spiegelung am Kreis)
In der Vektorrechnung:	65013	Kreis und Gerade
In der Analysis:	18121	Wurzelfunktionen für Halbkreise
	44020	Wurzelfunktionen für Halbkreise

In vorliegendem Text wird der Kreis als algebraische Kurve betrachtet und untersucht.
Es geht vor allem um verschiedene Gleichungsformen.

Inhalt

1 Vorschau

Die **Koordinatengleichung** für einen Kreis mit dem Mittelpunkt $M(x_M \mid y_M)$ und dem Radius r lautet $(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$.

Speziell für den Ursprungskreis gilt: $x^2+y^2=r^2$

Parametergleichungen für den Ursprungskreis: $x(t)=r\cdot\cos(t)$ und $y(t)=r\cdot\sin(t)$

für $t\in[0;2\pi[$

In Vektorschreibweise: $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} r\cdot\cos(t)\\ r\cdot\sin(t)\end{pmatrix}$

Bei beliebigem Mittelpunkt M: $x(t)=x_M+r\cdot\cos(t)$ und $y(t)=y_M+r\cdot\sin(t)$

bzw. $\vec{x}(t)=\vec{m}+\begin{pmatrix} r\cdot\cos(t)\\ r\cdot\sin(t)\end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} x_M+r\cdot\cos(t)\\ y_M+r\cdot\sin(t)\end{pmatrix}$

Es sind aber auch andere Parametergleichungen möglich.

Beispiel: $x=\sqrt{t+2},\ y=\sqrt{2-t}$ für $\mathbf{D}_t=[-2;2]$

Viertelkreis: $x^2+y^2=4$ mit $\mathbf{D}_x=[0;2]$

Die **Gleichung mit Polarkoordinaten** ist bei einem Ursprungskreis extrem einfach:
Der Winkel φ ist beliebig, unterliegt also keiner Bedingung. Daher kommt er auch nicht in der Gleichung vor, sondern nur der Radius: $r=4$
Das ist beispielsweise die Gleichung des Kreises um den Ursprung mit Radius 4.

Auch dies führt zu einem Kreis: $r=a\cdot\sin(t)$ $M(0\mid\tfrac{1}{2}a),\ r=\tfrac{1}{2}a \quad (a>0)$

oder $r=a\cdot\cos(t)$ $M(\tfrac{1}{2}a\mid 0),\ r=\tfrac{1}{2}a \quad (a>0)$

usw.

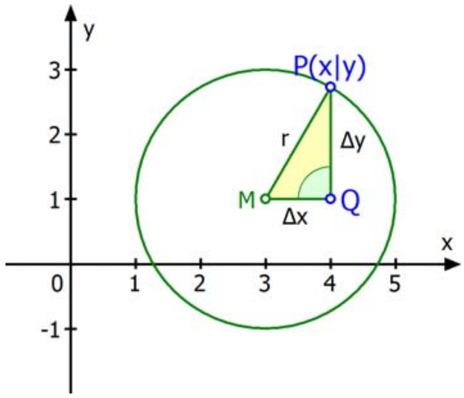
Für einen Kreis mit dem Mittelpunkt M, dessen Polarkoordinaten $r_M = d$ und φ_M sind, wobei dann R der Kreisradius ist, lautet die Gleichung in Polarkoordinaten:

$$r=d\cdot\cos(\varphi-\varphi_M)\pm\sqrt{d^2\cdot\cos^2(\varphi-\varphi_M)-(d^2-R^2)}$$

(Siehe Seite 6).

2 Details zu den Kreisgleichungen

1. **Warum stellt $(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$ einen Kreis um $M(x_M \mid y_M)$ mit Radius r dar?**



Die Bedingung dafür, dass $P(x \mid y)$ auf dem Kreis um M liegt, lautet:

Der Abstand dieses Punktes vom Kreismittelpunkt M ist konstant.

Man nennt diesen Abstand den Radius r.

Berechnung des Abstandes:

$$d(M,P)=\overline{MP}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{(x-x_M)^2+(y-y_M)^2} \quad \text{(Nach Pythagoras)}$$

Die Kreisbedingung lautet:

$$\overline{MP}=r \quad \text{oder auch} \quad \overline{MP}^2=r^2$$

Und das ergibt: $(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$, was zu beweisen war.

2. **Zeige, dass die Gleichung $x^2+y^2-4x+5y-\frac{9}{4}=0$ einen Kreis darstellt. Berechne Mittelpunkt und Radius.**

Die gezeigte Methode heißt Quadratische Ergänzung:

Umordnen: $\left(x^2-4x+\boxed{}\right)+\left(y^2+5y+\boxed{}\right)=\frac{9}{4}$ (2)

Das Ziel ist erkennbar: $(x-2)^2 + \left(y+\frac{5}{2}\right)^2 = r^2$ (3)

Die leeren Kästchen in (2) stellen Platzhalter für die zu ergänzenden Quadrate dar.

Wenn man nämlich die Gleichung (3) ausquadriert, entsteht:

Eingesetzt in (2): $\left(x^2-4x+\boxed{4}\right)+\left(y^2+5y+\boxed{\frac{25}{4}}\right)=\frac{9}{4}+\boxed{4}+\boxed{\frac{25}{4}}$

Die links ergänzten Quadrate $\boxed{4}$ und $\boxed{\frac{25}{4}}$ *mussten auch rechts ergänzt werden!*

Methode: Man erhält die zu ergänzenden Quadrate kurz so, dass man den Koeffizienten von x bzw. y halbiert und dann quadriert.
Die Quadrate muss man auch rechts ergänzen!

Zusammenfassen: $(x-2)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{50}{4}$

Ergebnis:

Der Kreis hat also den Mittelpunkt $M(2 \mid -2{,}5)$

und den Radius $r=\sqrt{\frac{50}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{50}=\frac{1}{2}\sqrt{25\cdot 2}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

Übungsaufgaben dazu im Text 22111

3 Wurzelfunktionen als Ersatzfunktionen für die Kurve

Die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ stellt den Kreis um O (0|0) mit r = 5 dar.

Löst man sie nach y auf
und zieht die Wurzel, folgt
bzw.

$$y^2 = 25 - x^2$$
$$|y| = \sqrt{25 - x^2}$$
$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

Man erhält also zwei Funktionen: $y = f_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$

und $y = f_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

Das Schaubild von f_1 stellt den oberen Halbkreis dar, das von f_2 den unteren Halbkreis.

Etwas komplizierter geht die Umrechnung, wenn der Kreismittelpunkt nicht im Ursprung liegt:

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 25$$

Tipp: Jetzt <u>keine</u> binomische Formel anwenden.
Damit vergibt man folgende günstige Möglichkeit der Umformung:

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 25$$
$$(y+1)^2 = 25 - (x-4)^2 \quad |\sqrt{}$$

Wissen: $\sqrt{u^2} = |u|$

$$|y+1| = \sqrt{25 - (x-4)^2}$$
$$y + 1 = \pm\sqrt{25 - (x-4)^2}$$
$$y = -1 \pm \sqrt{25 - (x^2 - 8x + 16)}$$
$$y = f_{1,2}(x) = -1 \pm \sqrt{-x^2 + 8x - 9}$$

Das Pluszeichen gehört zum oberen Halbkreis, das Minuszeichen zum unteren.

4. Parameterdarstellung:

Warum stellt das Gleichungssystem $\begin{cases} x(t) = r \cdot \cos(t) \\ y(t) = r \cdot \sin(t) \end{cases}$ für $t \in [0\,;2\pi[$ einen Ursprungskreis dar?

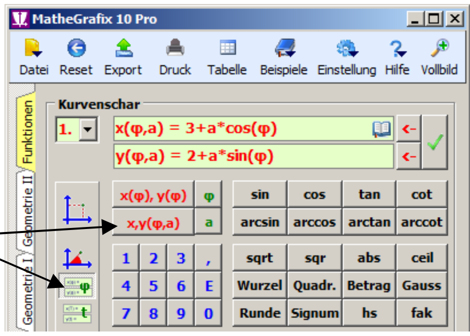
Man berechnet: $x^2 + y^2 = r^2 \cdot \cos^2(t) + r^2 \cdot \sin^2(t) = r^2 \cdot (\cos^2(t) + \sin^2(t)) = r^2 \cdot 1 = r^2$

Hierbei wurde diese Formel verwendet: $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ (trigonometrischer Pythagoras).

Also gilt $x^2 + y^2 = r^2$, was einen Ursprungskreis darstellt.

Ist der Mittelpunkt $M(x_M \mid y_M)$, dann lautet die Parametergleichungen $\begin{cases} x(t) = x_M + r \cdot \cos(t) \\ y(t) = y_M + r \cdot \sin(t) \end{cases}$

Die Kreisschar auf der Titelseite dieses Textes habe ich so mit **MatheGrafix** erstellt:
A ist in diesem Fall der variable Kreisradius, der dann unten für die Werte 1 bis 5 (Schritt 1) festgelegt worden ist.



5. Gleichung in Polarkoordinaten

(a) für den Ursprungskreis

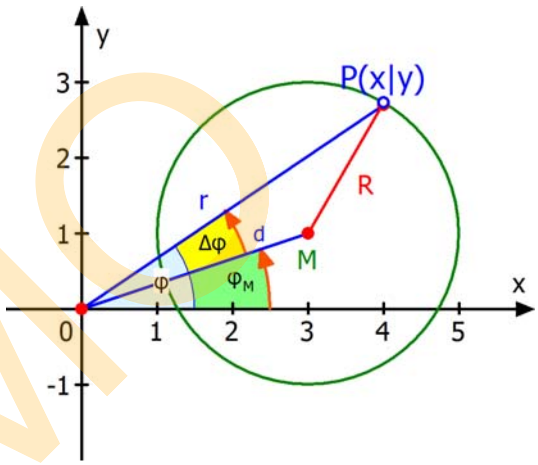
Diese Gleichung ist so einfach, dass Anfänger dadurch verwirrt werden.

Sie heißt nur $r = a$, wobei a eine positive Zahl ist.

Erklärung: Eine Gleichung mit Polarkoordinaten gibt an, wie der Radius, also die Länge der Strecke OP vom Winkel abhängt, den diese Strecke gegen die positive x-Achse einschließt. Bei einem Ursprungskreis ist aber dieser Radius konstant, also unabhängig von φ, weshalb φ auch nicht in der Polarkoordinatengleichung vorkommt.

Die Gleichung $r = 4$ kann man also deuten als Gleichung des Kreises um $M(0\,|\,0)$ mit Radius 4.

(b). für den Kreis $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$



Bei Polarkoordinaten (O ist der Pol) nennt man die Strecke OP meist r und den Winkel, den diese Strecke mit der positiven x-Achse bildet (meistens) φ.
Daher bezeichne ich den Kreisradius jetzt mit R.
Die Strecke OM zum Kreismittelpunkt nenne ich d.
Sie bildet mit der positiven x-Achse den Winkel φ_M.

Es geht jetzt um das Dreieck OMP.

Der Winkel bei O ist $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_M$.

Der Kosinussatz lautet im Dreieck OMP so:

$$R^2 = r^2 + d^2 - 2 \cdot r \cdot d \cdot \cos(\Delta\varphi)$$

Umstellen nach r: $r^2 - 2 \cdot d \cdot \cos(\Delta\varphi) \cdot r + d^2 - R^2 = 0$

Dies ist eine quadratische Gleichung für r mit den Lösungen

$$r = \frac{2d \cdot \cos(\Delta\varphi) \pm \sqrt{4d^2 \cdot \cos^2(\Delta\varphi) - 4 \cdot (d^2 - R^2)}}{2}$$

Vereinfachungen: Im Radikanden wird 4 ausgeklammert und daraus die Wurzel gezogen.

Dann kann man im Zähler 2 ausklammern und gegen den Nenner wegkürzen:

$$r = \frac{2d \cdot \cos(\Delta\varphi) \pm 2\sqrt{d^2 \cdot \cos^2(\Delta\varphi) - (d^2 - R^2)}}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot \left[d \cdot \cos(\Delta\varphi) \pm \sqrt{d^2 \cdot \cos^2(\Delta\varphi) - (d^2 - R^2)} \right]}{\cancel{2}_1}$$

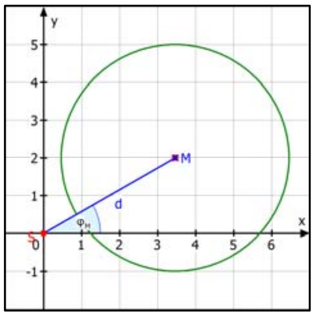
Schließlich ersetze ich noch $\Delta\varphi = \varphi_M - \varphi$.
Wegen $\cos(-x) = \cos(x)$ ist $\cos(\varphi_M - \varphi) = \cos(\varphi - \varphi_M)$,
was vielleicht etwas einfacher in der Anwendung ist (weil jetzt φ am Anfang der Differenz steht).

Ergebnis: $r = d \cdot \cos(\varphi - \varphi_M) \pm \sqrt{d^2 \cdot \cos^2(\varphi - \varphi_M) - (d^2 - R^2)}$

Das sieht *entsetzlich* aus. Also folgen Beispiele:

Beispiel 1:

Gegeben ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt durch die Polarkoordinaten $d = 4$ und $\varphi_M = 30^O \triangleq \frac{1}{6}\pi$ gegeben ist. Sein Radius sei R = 3.



Dann lautet die Kreisgleichung:

$$r = 4 \cdot \cos\left(\varphi - \tfrac{\pi}{6}\right) + \sqrt{16 \cdot \cos^2\left(\varphi - \tfrac{\pi}{6}\right) - 7}$$

Ich berechne nachträglich die kartesischen Koordinaten des Mittelkpunkts:

$$x_M = d \cdot \cos(\varphi_M) = 4 \cdot \cos\left(30^O\right) = 4 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$$

$$y_M = d \cdot \sin(\varphi_M) = 4 \cdot \sin\left(30^O\right) = 4 \cdot \tfrac{1}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad M\left(2\sqrt{3} \mid 2\right)$$

Hinweis: Ob man vor der Wurzel + oder – verwendet, ist egal. Beides ergibt den Kreis.

Beispiel 2:

Der Kreis in der Abbildung auf Seite 6 hat den Mittelpunkt $M(3 \mid 1)$ und R = 2.

Für die Gleichung $\quad r = d \cdot \cos(\varphi - \varphi_M) \pm \sqrt{d^2 \cdot \cos^2(\varphi - \varphi_M) - (d^2 - R^2)}$

Muss man zuerst berechnen:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

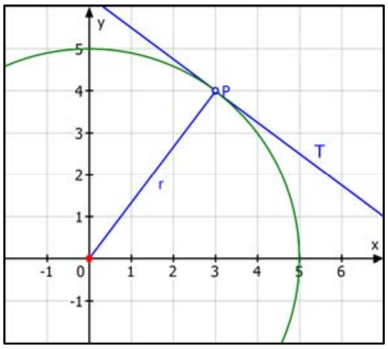
und dann φ_M aus der Gleichung $\tan(\varphi_M) = \dfrac{y_M}{x_M} = \dfrac{1}{3}$

Es folgt $\varphi_M = \arctan\left(\tfrac{1}{3}\right) \approx 0{,}322$ (Bogenmaß):

Ergebnis: $\quad r = \sqrt{10} \cdot \cos(\varphi - 0{,}322) + \sqrt{10 \cdot \cos^2(\varphi - 0{,}322) - 6}$.

3 Kreistangenten

Bei Kreistangenten gibt es die einfache Regel, dass die Tangente auf dem Berührradius senkrecht steht. Damit kann man Tangentengleichungen schnell aufstellen.



Beispiel 1: k: $x^2 + y^2 = 25$ $M(0\,|\,0)$ und $r = 5$.

Ein Kreispunkt ist z. B. $P(3\,|\,4)$

Steigung von OP: $m_{OP} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{3}$

Tangentensteigung: $m_{T,P} = -\frac{1}{m_{OP}} = -\frac{3}{4}$

Tangente aus der Punktsteigungsform $y - y_P = m(x - x_P)$:

$y - 4 = -\frac{3}{4}(x-3) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$.

Es gibt auch eine **Formel für die Tangentengleichung:**

Es sei $P(x_1\,|\,y_1)$ der Berührpunkt, dann lautet die Gleichung der Tangente:

$x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = r^2$ (Text 22112 Seite 15)

Sie führt zu. $3 \cdot x + 4 \cdot y = 25 \quad \Rightarrow \quad 4y = 25 - 3x \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$

Beispiel 2: k: $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 90$ $B(6\,|\,1)$

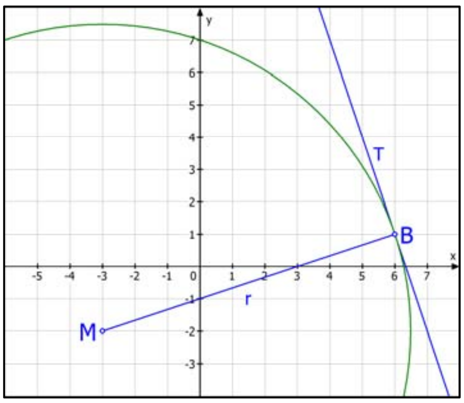
Der Radius ist $r = \sqrt{90}$, der Mittelpunkt ist $M(-3\,|\,-2)$

B liegt auf k, denn es gilt: $\overline{MB} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{81+9} = \sqrt{90} = r$

Tangentengleichung in B:

$m_{MB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad m_T = -3$

T: $y - 1 = -3(x-6) \quad \Leftrightarrow \quad y = -3x + 19$



Auch hierzu gibt es eine **Tangentenformel**:

Aus $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 90$ macht man

$(x_1+3)(x+3) + (y_1+2)(y+2) = 90$.

Setzt man $B(6\,|\,1)$ ein, folgt:

$(\boxed{6}+3)(x+3) + (\boxed{1}+2)(y+2) = 90$

also: $9(x+3) + 3(y+2) = 90 \quad |:3$

$3(x+3) + (y+2) = 30$

$y + 2 = 30 - 3x - 9$

$y = -3x + 19$